Z-TransformsとNoetherian Pairs (可換環論の研究)

AUTHOR(S):

伊藤, 史朗

数理解析研究所講究録
374巻 1980年 157-163

Z-transforms と noetherian pairs

広島大 理学部 伊藤史朗

J. R. Matijevic は A が reduced ネーター環のとき (A, A^g) がネーター pair となることを証明した（[3]）。又、最近 D. D. Anderson によって，一般のネーター環に対して (A, A^g) がネーター pair となる1つの十分条件が得られた。ここではさらに一歩進んで，(A, A^g) がネーター pair となる必要十分条件について考えてみたい。

注意 ネーター環 A に対し，$A^g = \{ x \in Q(A) \mid x \in A$ 又は $\dim A/A:_A x = 0 \}$ とおき，A^g を A の global transform という。又，$A \subseteq B$ であって，A と B の中間の環が全てネーターであるとき，(A, B) はネーター pair であるという。

設定を少し一般化しておく。A をネーター環，Z を $Spec(A)$ の部分集合で特殊化で閉じているものとする。さらに Z の元は全て regular prime ideal（即ち，A の非零因子を含む prime ideal）とする。$Ass_A(M) \subseteq Ass_A(A)$ となる A-加群

Mに対し,

$$T(Z,M)=\{x\in M\otimes_A Q(A)\mid V(M:_A x)\subseteq Z\}$$

とおき，これをMのZ-transformと呼ぶことにする。（Aのイデアル I を含む素イデアル全体の集合を$V(I)$で表わす。）$T(Z,A)$はAを含む$Q(A)$の部分環であって，$T(Z,M)$は自然に$T(Z,A)$-加群となっている。ZとしてAのregular極大イデアル全体の集合をとれば$T(Z,A)=A^g$である。

定理を述べる前にZ-transformsについていくつかの注意をしておく。A及びZは上で用いたものと同じとする。AのイデアルIで$\mathrm{Ass}_A(A/I)\subseteq \mathrm{Ass}_A(A)$となるものを考える。$Z'=\{\mathfrak{z}/I \mid \mathfrak{z}\in Z,\ \mathfrak{z}\supseteq I\}$とおくと$Z'$に含まれる素イデアルは全て$B=A/I$の非零因子を含む素イデアルであるが，定義から容易に分るように$T(Z,B)=T(Z',B)$である。又，自然な環準同型$T(Z,A)\to T(Z,B)$が存在して，そのKernelは$T(Z,I)=T(Z,A)\cap I\cdot Q(A)$となっている。

<u>定理</u>　Aをネーター環，ZをSpec(A)の部分集合で特殊化で閉じているものとする。さらにZに含まれる素イデアルは全てregularであるとする。このとき次の条件(1)(2)は同値である。

(1)　$(A,T(Z,A))$はネーターpair

(2)　(a) 任意の$\mathfrak{z}\in \mathrm{Ass}_A(A)$について$(A/\mathfrak{z},T(Z,A/\mathfrak{z}))$は

ネーター pair であって，さらに

(b) $\mathrm{Ass}_A(A)$ の元 $\mathfrak{p}$ で $A_{\mathfrak{p}}$ が reduced でないものについては，$T(Z, A/\mathfrak{p})$ は有限生成 $A/\mathfrak{p}$-加群。

もし任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(A)$ に対し $A_{\mathfrak{p}}$ が reduced でないなら，上の(1)(2)は次の(3)と同値。

(3) $T(Z, A)$ は有限生成 A-加群。

もし任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ に対し $(A/\mathfrak{p})'$（$= A/\mathfrak{p}$ の $Q(A/\mathfrak{p})$ における整閉包）が有限生成 $A/\mathfrak{p}$-加群であれば上の(1)(2)は次の(4)と同値。

(4) (a) 任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(A)$ について $(A/\mathfrak{p}, T(Z, A/\mathfrak{p}))$ はネーター pair であって，さらに

(b) $\mathrm{Ass}_A(A)$ の元 $\mathfrak{p}$ で $A_{\mathfrak{p}}$ が reduced でないものについて，$(A/\mathfrak{p})'$ の高さ1の極大イデアル $\mathfrak{m}$ で $\mathfrak{m} \cap A/\mathfrak{p} \in Z$ となるものは存在しない。

定理の証明には次の4つの補題が必要である。証明は全て容易であるから省略する。補題1, 2, 3についてはEGA IV (5.11)を参考にせよ。

補題1. A をネーター環，$\{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r\}$ を A の極小素イデアルまで $A_{\mathfrak{p}}$ が reduced とならないもの全体のなす集合とする。このとき次の(1)(2)が成立する。

(1) Aの中零イデアルからなる列 $M_n \supset \cdots \supset M_0 = 0$ で次の性質をもつものが存在する。

(a) 各 j $(0 \leq j < n)$ に対し素イデアル $\mathfrak{z}_i$ $(1 \leq i \leq r)$ が存在して，$\mathfrak{z}_i M_{j+1} \subseteq M_j$ かつ M_{j+1}/M_j は $A/\mathfrak{z}_i$ のイデアルに A-加群として同型。

(b) $\mathrm{Ass}_A(A/M_j) = \mathrm{Ass}_A(A)$ $j = 0, \cdots, n$。

(c) Aの任意の極小素イデアル $\mathfrak{z}$ に対し，$(A/M_n)_{\mathfrak{z}}$ は reduced。

(2) 各 $\mathfrak{z}_i$ $(1 \leq i \leq r)$ に対し，Aの中零イデアル $N_i (\neq 0)$ が存在して，$\mathrm{Ass}_A(A/N_i) = \mathrm{Ass}_A(A)$，$\mathfrak{z}_i N_i = 0$ かつ N_i は $A/\mathfrak{z}_i$ のイデアルに A-加群として同型。

補題 2. Aをネーター環で，Zは定理のそれと同じものとする。$\mathfrak{z}$をAの極小素イデアルで $A_{\mathfrak{z}}$ が reduced でないものとすると補題1より，Aの中零イデアル $N(\neq 0)$ が存在して $\mathrm{Ass}_A(A/N) = \mathrm{Ass}_A(A)$，$\mathfrak{z}N = 0$ かつ Nは$A/\mathfrak{z}$ のイデアルにA-加群として同型である。このとき $T(Z, N)$ は $T(Z, A/\mathfrak{z})$ のイデアルに $T(Z, A)$-加群として同型である。

補題 3. Aをネーター整域で A' (=Aの$Q(A)$における整閉包) はA-加群として有限生成とする。Zは定理のそれと同

じものとする。このとき次の(1)(2)は同値である。

(1) $T(Z, A)$ は有限生成 A-加群。

(2) P を A' の素イデアルで $P \cap A \in Z$ とすると ht $P \geqq 2$。

補題4. $A \subseteq B \subseteq C$ を整域で同じ商体をもつとする。もし (A, B) がネーター pair で C が有限生成 B-加群であれば，(A, C) もネーター pair である。

さて、定理の証明は次のようにする。

まず、A のイデアル (0) の準素イデアル分解 $(0) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m$ を考える。$\mathrm{Min}(A) = \{\sqrt{\mathfrak{q}_1}, \cdots, \sqrt{\mathfrak{q}_s}\}$ としてよい。$I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s$，$J = T(Z, A) \cap IQ(A)$ とおく。J は標準同型 $T(Z, A) \longrightarrow T(Z, A/I)$ の kernel でもある。最初に，条件(1)は次の(2')と同値であることを証明しよう。

(2') J は有限生成 A-加群で，$\mathfrak{z} \in \mathrm{Ass}_A(A)$ であれば $(A/\mathfrak{z}, T(Z, A/\mathfrak{z}))$ はネーター pair。さらに $\mathfrak{z}$ が A の極小素イデアルで $A_\mathfrak{z}$ が reduced でなければ $T(Z, A/\mathfrak{z})$ は有限生成 A-加群。

(1)$\Rightarrow$(2')：$\mathfrak{z} \in \mathrm{Ass}_A(A)$ とすると $A/\mathfrak{z}$ は A のイデアルに同型である。従って $T(Z, A/\mathfrak{z})$ は $T(Z, A)$ のイデアルに同型。これより自然な準同型 $\varphi : T(Z, A) \longrightarrow T(Z, A/\mathfrak{z})$ は有限。故に(1)の

条件及び補題4より $(A/\mathfrak{p}, T(Z, A/\mathfrak{p}))$ はネーター pair。次に $(A, T(Z,A))$ がネーター pair であることから $A[J]$ はネーター環であって J は $A[J]$ の巾零イデアルである。よって適当に $x_1,\cdots,x_l \in J$ を選べば $J=\sum A[J]x_i = \sum Ax_i + J\cdot\sum Ax_i$。これより J は有限生成 A-加群。さて，$\mathfrak{p}$ を A の極小素イデアルで $A_\mathfrak{p}$ は reduced でないとする。補題1より，A の巾零イデアル $K(\neq 0)$ が存在して，$\mathrm{Ass}_A(A/K)=\mathrm{Ass}_A(A)$，$\mathfrak{p}K=0$，$K$ は $A_\mathfrak{p}$ のイデアルに同型。$K' = T(Z,A)\cap KQ(A)\ (=T(Z,K))$ とおくと，補題2より K' は $T(Z, A/\mathfrak{p})$ のイデアルに同型である。J と同じく K' も又 A-加群として有限生成。従って $T(Z,A/\mathfrak{p})$ は A-加群として有限生成となる。

(2')$\Rightarrow$(1): $A/I \subseteq T(Z,A)/J \subseteq T(Z, A/I)$ となることは明らかであろう。J が有限生成 A-加群，かつ $T(Z,A)$ の巾零イデアルであることから $(A/I, T(Z,A/I))$ がネーター pair であれば $(A,T(Z,A))$ もネーター pair であることが分る。よって $(A/I, T(Z,A/I))$ がネーター pair であることを示せばよい。従って最初から $\mathrm{Min}(A)=\mathrm{Ass}_A(A)$ としてよい。A_{red} は $A/\mathfrak{p}_1\times\cdots\times A/\mathfrak{p}_s$ の，$T(Z, A_{red})$ は $T(Z,A/\mathfrak{p}_1)\times\cdots\times T(Z,A/\mathfrak{p}_s)$ の部分環と考えられる（ここで $\sqrt{\mathfrak{q}_i}=\mathfrak{p}_i$ $i=1,\cdots,s$）。今 $(A/\mathfrak{p}_i, T(Z,A/\mathfrak{p}_i))$ $(i=1,\cdots,s)$ はネーター pair であるから $(A_{red}, T(Z,A_{red}))$ も又ネーター pair となる。ここで補題1(1)の巾零イデアルの

列 $M_n \supset \cdots \supset M_0 = 0$ を考える。今証明したことより $(A/M_n, T(Z, A/M_n))$ はネーター pair である。次に $n \geqq 1$ とし，$(A/M_1, T(Z, A/M_1))$ はネーター pair であると仮定しよう。$N = T(Z, A) \cap M_1 Q(A)$ $(= T(Z, M_1))$ とおく。A の極小素イデアル $\mathfrak{p}$ を，$\mathfrak{p} M_1 = 0$，M_1 は $A/\mathfrak{p}$ のイデアルに同型となるようにとる。補題 2 より N は $T(Z, A/\mathfrak{p})$ のイデアルに同型であるから N は有限生成 A-加群である。又，N は $T(Z, A)$ の巾零イデアルでもある。この事実と $(A/M_1, T(Z, A/M_1))$ がネーター pair であるとの仮定より $(A, T(Z, A))$ がネーター pair となることが容易に示される。

参考文献

[1] D.D. Anderson, Global transforms and noetherian pairs, Hiroshima Math. J. 9 (1979)

[2] A. Grothendieck, Elements de Geometrie Algebrique IV Publ. Math. IHES. 28 (1966)

[3] J.R. Matijevic, Maximal ideal transforms of noetherian rings, Proc. Amer. Math. Soc. 54 (1976)

[4] A. Wadsworth, Pairs of domains where all intermediate domains are noetherian, Trans. AMS 195 (1974)